



GPUs e dinâmica dos fluidos: sumário e aplicações em problemas de fronteira imersa

Tada E*, Watanabe S† e Aoki T*

*School of Engineering, Tokyo Institute of Technology, Tokyo, Japan. †Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University, Fukuoka, Japan.

Resumo. Nos primeiros anos do século XXI, foi desenvolvida uma plataforma para a programação de GPUs para uso geral, o que alavancou o estudo da dinâmica de fluidos computacional por meio da computação paralela. Neste trabalho, resumimos dois métodos que podem ser aplicados a tal computação. Primeiramente, descrevemos o método do escoamento fracamente compressível, que negligencia variações de densidade em curtos intervalos de tempo; bem como demonstramos uma aplicação deste método em um problema bidimensional. Por fim, apresentamos o método lattice Boltzmann com cumulantes e método de fronteira imersa por força direta, que nos permitiu descobrir estruturas de vórtices inéditas no rasto de uma bandeira ao vibrar violentamente.

Palavras-chave. Dinâmica dos fluidos computacional, interação fluido-estrutura, método Lattice-Boltzmann.

Introdução. Quando estudamos mecânica dos fluidos, há três abordagens que podemos adotar: a abordagem teórica (por exemplo, desenvolvimento de modelos matemáticos para resolver equações de fluidos), a abordagem experimental (por exemplo, pela avaliação de modelos em um túnel de vento), e a tão chamada *terceira abordagem*, que é pela simulação em computador. Tal método é denominado *dinâmica dos fluidos computacional* (CFD, na sigla em inglês). A maioria dos métodos envolve a solução de modelos matemáticos das Equações de Navier-Stokes, que, em sua forma geral e presumindo um fluido newtoniano (ou seja, de viscosidade constante), são representadas pela Eq. 1:

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) & = F_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) & (a) \\ \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) & = F_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) & (b) \\ \rho \frac{\partial w}{\partial t} + \rho \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) & = F_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) & (c) \end{cases} \quad (1)$$



Na Eq. 1, ρ [kg/m³] se refere à densidade do fluido, t [s] ao tempo, F [N] à força externa, p [N/m²] à pressão, e μ [Pa•s] à viscosidade dinâmica. x , y e z [m] se referem às coordenadas espaciais, e u , v e w [m/s] se referem aos componentes da velocidade do fluido em relação a x , y e z , respectivamente.

As equações de Navier-Stokes por si não são suficientes para resolver problemas de fluidos; faz-se necessário considerar a equação da continuidade (Eq. 2). Nesta obra consideraremos nula a divergência da densidade, i.e., para todo volume de controle, a quantidade de fluido que entra é igual àquela que sai de dado volume:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

Determinar a solução das Eqs. 1 e 2 analiticamente é somente possível para problemas simplificados, como o fluxo de Poiseuille, que simplifica as equações com condições de simetria e de fronteira. Isso é devido ao fato de as equações de Navier-Stokes serem equações diferenciais parciais não lineares (1). Portanto, aproximações matemáticas se tornam necessárias para solucionar problemas mais próximos da realidade.

Observação: nesta obra, adotamos os padrões internacionais de notação numérica. Desta forma, pontos são usados para separar a parte inteira da parte decimal dos números.

Evolução da dinâmica de fluidos computacional (CFD). Problemas complexos de dinâmica dos fluidos podem ser resolvidos mais facilmente por *métodos de discretização*, que tomam grandezas contínuas (como espaço e tempo) e as representam em um número finito de pontos. Métodos de discretização usados na dinâmica de fluidos incluem os métodos dos elementos finitos, dos volumes finitos, e das diferenças finitas (2).

Embora a finitude de pontos torne o problema solúvel, na maioria dos casos devemos representar o espaço e o tempo em um número enorme de pontos, visto que maiores resoluções estão ligadas a resultados mais condizentes com o real comportamento dos fluidos. Por exemplo, em um espaço tridimensional equivalente a um cubo de lado 1 m, ao definirmos pontos espaçados 1 mm entre si, teremos 1 milhão de pontos com densidades, velocidades e pressões distintas entre si. Calcular todos estes valores à mão torna-se, portanto, uma tarefa proibitivamente exaustiva. Isso justifica o imprescindível uso de computadores na análise de fluidos.

Até a primeira metade da década de 2000, o componente responsável por calcular as propriedades dos fluidos era a *unidade de processamento central (CPU, na sigla em inglês)*. Embora seja capaz de realizar bilhões de cálculos por segundo, as CPUs têm uma limitação: cada processo deve ser realizado imediatamente após o outro; ou seja, deve-se realizar a *programação em série*. No entanto, em 2007, a Nvidia Corporation, conhecida até então por fabricar *chipssets* de



unidades de processamento gráfico (GPU, na sigla em inglês), desenvolveu a arquitetura CUDA, que permitia o uso geral de suas GPUs para propostas distintas de processamento gráfico.

A principal vantagem é que, enquanto uma CPU *multi-core* tem de 2 a 18 núcleos, uma GPU geralmente tem milhares deles. Cada núcleo é subdividido em *blocos*, que, por sua vez, são subdivididos em *threads*. Cada bloco é executado por um multiprocessador distinto, logo, torna-se possível executar vários processos simultaneamente, no que é conhecido hoje como *programação paralela*. Ademais, a arquitetura CUDA permite a fácil definição de blocos e threads em um espaço tridimensional (através de índices denominados *blockIdx*, *threadIdx*, etc) (3), tornando-se muito adequada para a aplicação em problemas de fluidos. Para se produzir um código para controlar GPUs com CUDA, utilizamos CUDA-C, uma extensão da linguagem C.

Não bastasse a possibilidade de paralelização, GPUs oferecem vantagens também na velocidade de transferência de dados, uma vez que são dotadas de suas próprias *memórias de acesso aleatório*, denominadas *VRAM* na sigla em inglês (em contraposição à *RAM* que armazena dados processados pela CPU). Como podemos ver na Fig. 1, a velocidade de transferência entra a RAM e a CPU pode chegar a aproximadamente 25 GB/s para modelos DDR4 de alta performance, enquanto a transferência entre a VRAM e o processador da Nvidia Tesla P100 chega à velocidade de 732 GB/s (4), ou seja, mais de 29 vezes mais rápida. No entanto, somente a CPU é capaz de inicializar e analisar os dados processados na GPU, portanto faz-se necessário que a RAM se comunique com a VRAM. Tal comunicação é feita indiretamente e com o auxílio da conexão PCIe. Devido à menor velocidade de transferência de dados pela PCIe, deve-se evitar transferir dados entre a CPU e a GPU em momentos diferentes da inicialização e coleta de dados.

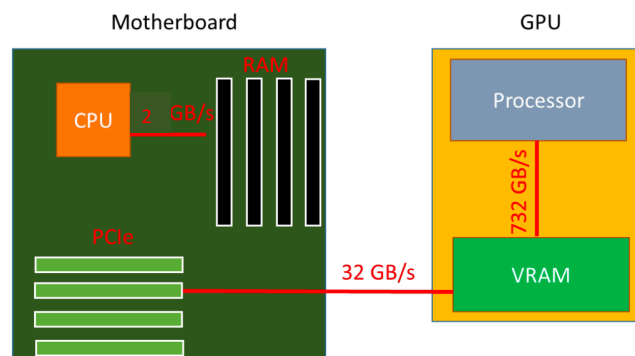


Figura 1. Fluxo de dados em um computador dotado de ambas CPU e GPU

Resolvendo problemas de baixo número de Reynolds pelo escoamento fracamente compressível.

Nesta seção, introduzimos um método para resolver problemas de fraca turbulência e que pode ser processado por GPUs. O *método do escoamento fracamente compressível (weakly compressible flow method)* parte das equações de Navier-Stokes e da continuidade (Eqs. 1 e 2). No entanto, temos 4 equações e 5 incógnitas (u , v , w , p e ρ), o que torna o sistema indeterminado. Para tornar



o sistema determinado, deve-se considerar um fenômeno físico a mais, que, no caso, é a equação da energia, representada pela equação abaixo:

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \frac{\partial u(\rho e + p)}{\partial x} + \frac{\partial v(\rho e + p)}{\partial y} + \frac{\partial w(\rho e + p)}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

Na Eq. 3, e se refere à energia interna específica [m^2/s^2], que, considerando um gás ideal, podemos escrever em termos das outras variáveis como abaixo (γ é o coeficiente de expansão adiabática do gás):

$$e = \frac{p}{\rho(\gamma-1)} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) \quad (4)$$

Alternativamente, podemos escrever todas as equações na forma matricial, como na Eq. 5. A partir deste ponto, ignoramos os termos de força externa presentes na Eq. 1; também deixamos de lado por enquanto as forças viscosas, que serão adicionadas posteriormente. Como as aplicações deste método serão apresentadas em problemas bidimensionais, descreveremos este método em duas dimensões (o método tridimensional é determinado analogamente; para mais detalhes sobre o método em 3D, ver Matsushita (5)):

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial z} = \mathbf{0} \quad (5)$$

onde:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \rho \\ u \\ v \\ e \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} u & \rho & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & \frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & \rho c^2 & 0 & u \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} v & 0 & \rho & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v & \frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & \rho c^2 & v \end{bmatrix} \quad (6)$$

e $c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$ [m/s] é a velocidade do som.

Agora, pensamos em cada direção como uma equação separada; este é o *método de separação* ou *splitting method*, em que analisamos cada equação euleriana separadamente:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x} = \mathbf{0} & \text{(a)} \\ \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial y} = \mathbf{0} & \text{(b)} \end{cases} \quad (7)$$

Tomemos a Eq. 7-a, inerente à direção x . Podemos reescrevê-la como na Eq. 8:

$$\begin{cases} \frac{D}{Dt} \left(\rho - \frac{1}{c^2} p \right) = 0, & \frac{\partial x}{\partial t} = u & \text{(a)} \\ \frac{D}{Dt} \left(u + \frac{1}{\rho c} p \right) = 0, & \frac{\partial x}{\partial t} = u + c & \text{(b)} \\ \frac{D}{Dt} \left(u - \frac{1}{\rho c} p \right) = 0, & \frac{\partial x}{\partial t} = u - c & \text{(c)} \\ \frac{D}{Dt} (v) = 0, & \frac{\partial x}{\partial t} = u & \text{(d)} \end{cases} \quad (8)$$

O significado das equações acima é que as grandezas sujeitas à derivação total são invariáveis nas velocidades u , $u+c$, $u-c$, e v , cada. Tais velocidades são denominadas *velocidades características*, e a Fig. 2 fornece uma explicação gráfica deste conceito:

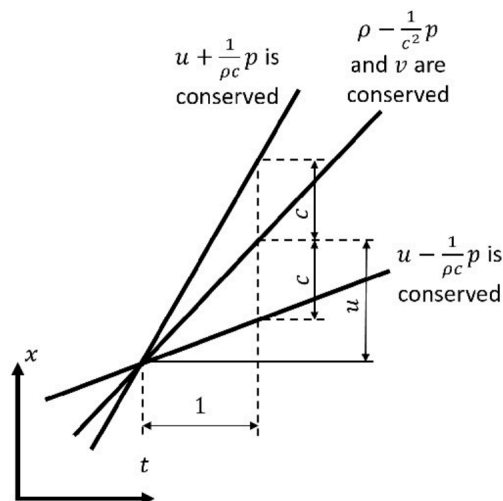


Figura 2. Visualização gráfica das velocidades características

Visto que a Eq. 8 nos mostra expressões conservadas nas velocidades características, nos utilizamos das mesmas para interpolar as grandezas do próximo passo temporal. Suponhamos que n seja o índice de um intervalo temporal cujas grandezas físicas são conhecidas. Antes de



determinarmos os valores do intervalo $n+1$, determinamos os valores de um primeiro intervalo intermediário, os quais escreveremos com a notação r em sobrescrito (atenção: não é uma potência), uma vez que a Eq. 8 somente considera a direção x :

$$\begin{cases} \rho^r - \frac{1}{\tilde{c}^2} p^r = \rho^* - \frac{1}{\tilde{c}^2} p^* & (a) \\ u^r + \frac{1}{\tilde{\rho}\tilde{c}} p^r = u^+ + \frac{1}{\tilde{\rho}\tilde{c}} p^+ & (b) \\ u^r - \frac{1}{\tilde{\rho}\tilde{c}} p^r = u^- - \frac{1}{\tilde{\rho}\tilde{c}} p^- & (c) \\ v^r = v^* & (d) \end{cases} \quad (9)$$

Na Eq. 9, o til ‘ \sim ’ significa a grandeza referente ao intervalo de tempo n (já conhecida). Usamos os valores do intervalo n em todas as etapas do *directional splitting*. Daí vem o nome do método, *escoamento fracamente compressível*, visto que esta simplificação tem como base a assunção de que a diferença de pressão entre dois intervalos de tempo consecutivos é insignificante. Tal assunção é válida para baixos números de Mach ($Ma = \frac{u}{c} < 0.03$). O significado das notações sobrescritas ‘+’, ‘-’ e ‘*’ são valores interpolados em relação às velocidades características $u+c$, $u-c$, e u , respectivamente. São necessários 4 pontos para a interpolação. Demonstramos a seguir o método de interpolação para a variável p ; o método é análogo para as outras variáveis.

Sejam i e j os índices do ponto no qual sabemos $p_{i,j}^n$, tais que definem o ponto $(x_{i,j}, y_{i,j})$ nas coordenadas cartesianas. O polinômio é definido pelo sentido da velocidade característica: se a velocidade característica for positiva, interpola-se pelos valores $p_{i-2,j}^n, p_{i-1,j}^n, p_{i,j}^n$, e $p_{i+1,j}^n$; caso seja negativo; pelos valores $p_{i-1,j}^n, p_{i,j}^n, p_{i+1,j}^n$, e $p_{i+2,j}^n$; como mostra a Fig. 3, que considera que $u > 0$, $u+c > 0$ e $u-c < 0$:

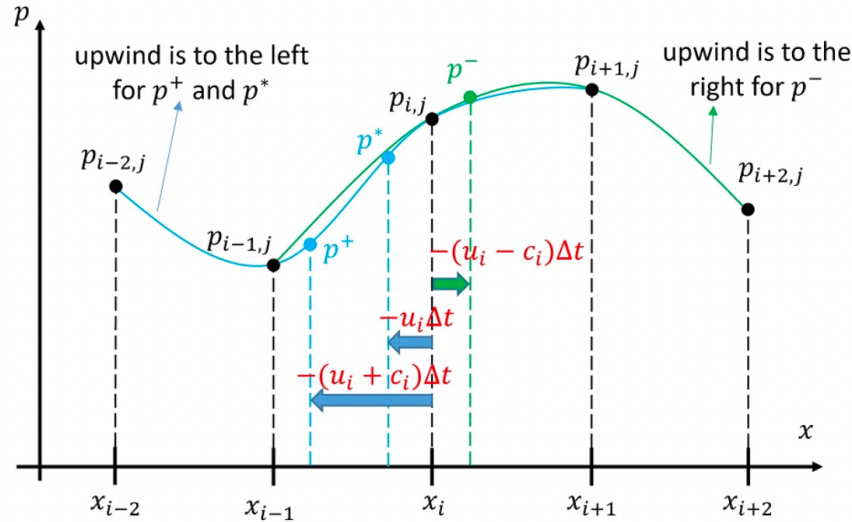


Figura 3. Interpolação contra o vento para a variável p (*upwind method*)

A solução do sistema de equações descrito na Eq. 9 é:

$$\left\{ \begin{array}{l} p^r = \frac{1}{2}(p^+ + p^- + \tilde{\rho}\tilde{c}(u^+ - u^-)) \quad (a) \\ u^r = \frac{1}{2}\left(u^+ + u^- + \frac{1}{\tilde{\rho}\tilde{c}}(p^+ - p^-)\right) \quad (b) \\ \rho^r = \rho^* + \frac{1}{\tilde{c}^2}(p^r - p^*) \quad (c) \\ v^r = v^* \quad (d) \end{array} \right. \quad (10)$$

Tendo os valores do primeiro intervalo intermediário, calculamos os do segundo, cujo índice é s . Desta vez, usamos as velocidades características relativas à direção y e interpolamos também nesta direção como no método explicado pela Fig. 3, obtendo novos valores com as notações '+', '-' e '*'. Os valores relativos ao segundo intervalo intermediário são:

$$\left\{ \begin{array}{l} p^s = \frac{1}{2}(p^+ + p^- + \tilde{\rho}\tilde{c}(v^+ - v^-)) \quad (a) \\ v^s = \frac{1}{2}\left(v^+ + v^- + \frac{1}{\tilde{\rho}\tilde{c}}(p^+ - p^-)\right) \quad (b) \\ \rho^s = \rho^* + \frac{1}{\tilde{c}^2}(p^s - p^*) \quad (c) \\ u^s = u^* \quad (d) \end{array} \right. \quad (11)$$



Tendo finalizado o *splitting method*, resta adicionar o termo da viscosidade, ignorado a partir da Eq. 5. A viscosidade é adicionada conforme abaixo, e, enfim, obtemos os valores do intervalo $n+1$:

$$\begin{cases} u^{n+1} = u^s + \frac{\mu}{\bar{\rho}} \left(2 \frac{\partial^2 u^s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v^s}{\partial xy} \right) & (a) \\ v^{n+1} = v^s + \frac{\mu}{\bar{\rho}} \left(2 \frac{\partial^2 v^s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v^s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^s}{\partial xy} \right) & (b) \\ p^{n+1} = p^s & (c) \\ \rho^{n+1} = \rho^s & (d) \end{cases} \quad (12)$$

No método demonstrado até aqui, começamos a calcular pela direção x e, em seguida, calculamos a direção y . No entanto, no processo de computação, intercalamos esta ordem a cada intervalo (i.e., para obter $n+2$, primeiro calculamos pela direção y e depois pela x) de maneira a evitar erros de cálculo (6). Pode-se perceber que os processos descritos pelas equações de 10 a 12, bem como a interpolação, podem ser feitos simultaneamente por diferentes processadores, pois somente dependem dos valores do intervalo anterior, e não de valores que pertencem ao mesmo intervalo temporal. Logo, usamos as GPUs para processar este algoritmo na maioria dos processos, exceto na inicialização dos valores e na coleta de dados em um intervalo fixo de tempo, onde os valores são copiados para a RAM e salvos no disco rígido.

Interação fluido-estrutura e função level set. Em problemas de fronteira imersa, necessitamos, primeiramente, distinguir se um ponto no espaço está dentro da estrutura imersa ou não. Para isso, nos utilizamos da função *level set* $\Phi_{i,j}$, que retorna valores positivos para pontos contidos no fluido, e negativos para pontos contidos na estrutura, como na Fig. 4. A magnitude de $\Phi_{i,j}$ corresponde à distância até a fronteira mais próxima:

a

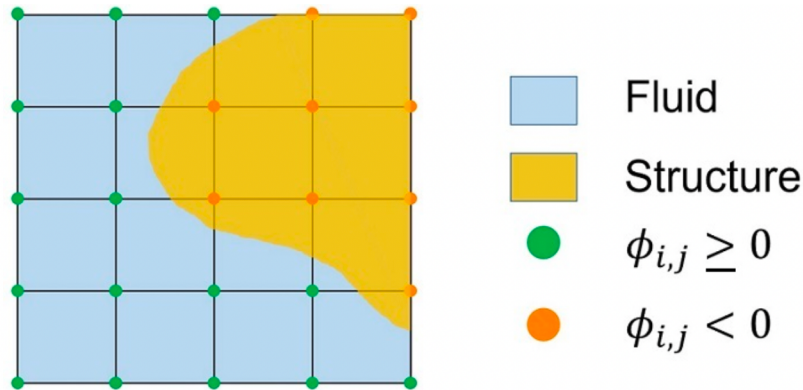


Figura 4. Pontos sobre a malha de cálculo e seus valores de *level set*

Neste trabalho, usamos uma malha 10 vezes mais refinada que a malha das grandezas físicas para representar o *level set*. Isto é para aumentar a precisão da localização da fronteira. Denotemos i' e j' os índices dos pontos sobre a malha refinada do *level set* que coincidem com a , $i' = 10i$ e $j' = 10j$, então pontos sobre a malha refinada têm índices $i' + k, j' + l$, sendo $0 \leq k, l \leq 9$. A razão entre a distância do ponto até a fronteira e o espaçamento da malha não-refinada $\Delta x = \Delta y$ é $q = \frac{\text{dist. até a fronteira}}{\Delta x}$. Logo, temos que a distância do ponto sobre a malha das grandezas físicas até a fronteira, seguindo uma linha paralela ao eixo x , é:

$$q\Delta x = \frac{k\Delta x}{10} + \Phi_{i'+k,j'} \quad (13)$$

Tendo tal informação, podemos detectar a localização das fronteiras para aplicação no *splitting method*. Outra informação necessária é as condições de fronteira, que são as condições sem derrapagem, ou seja, a velocidade do líquido na fronteira u_b, v_b é igual à velocidade local do objeto imerso. Na Eq. 14, demonstramos para os passos relativos à direção x ; a notação subscrita b denomina os valores relativos à fronteira:

$$\begin{cases} u_b = u_b & (a) \\ v_b = v_b & (b) \\ \left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x=x_b} = 0 & (c) \\ \left. \frac{\partial \rho}{\partial x} \right|_{x=x_b} = 0 & (d) \end{cases} \quad (14)$$



Para calcular os intervalos intermediários de pontos nas redondezas da fronteira, adotamos o procedimento a seguir, no caso de u^* quando a direção do fluxo é positiva, na direção x . Na Fig. 5, os valores em azul se referem à malha cartesiana sobre a qual as grandezas físicas são conhecidas. Posicionamos o eixo azul $u(x)$ sobre o ponto mais próximo da fronteira que está no seu exterior, cuja velocidade é $u_{i,j}^n$. A fronteira é representada pela linha vermelha com hachuras, e sua coordenada no sistema azul (com origem em $x_{i,j}$) é $q\Delta x$. Definimos, então, o sistema de coordenadas vermelho, cuja origem está Δx à esquerda da fronteira. Por interpolação linear de $u_{i-3,j}^n, u_{i-2,j}^n, u_{i-1,j}^n$ e $u_{i,j}^n$, definimos os pontos em vermelho, espaçados a cada Δx a partir da origem das coordenadas vermelhas. Finalmente, temos 3 pontos em vermelho, mais a velocidade da fronteira u_b , daí realizamos a interpolação lagrangiana de 3ª ordem. O ponto relativo à velocidade característica u dista $u_{i,j}^n \Delta t - (1 - q)\Delta x$ à esquerda da origem do sistema de coordenadas vermelho.

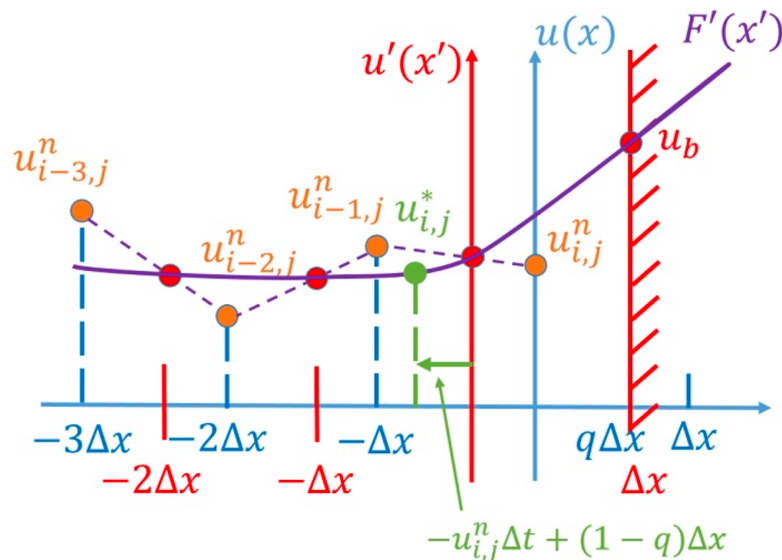


Figura 5. Cálculo de $u_{i,j}^*$ nas proximidades da fronteira imersa

Para a interpolação da pressão e densidade próximas à fronteira, a condição é aplicada de tal maneira que a derivada em relação a x é zero, e não calculamos os 3 pontos em vermelho; o polinômio de 3º grau é calculado a partir de $p_{i-2,j}^n, p_{i-1,j}^n$ e $p_{i,j}^n$, mais a condição de fronteira.

Aplicação do escoamento fracamente compressível: cilindro em rotação. Aplicamos o método a um problema clássico de interação fluido-estrutura: o escoamento ao redor de um cilindro. Experimentalmente, observam-se vórtices no rasto do cilindro, que se alternam nos dois lados do



escoamento. Inicialmente, realizamos o experimento com o cilindro sem rotação, depois repetimos o experimento com o cilindro em velocidade angular constante.

As condições iniciais são $u = 1, v = 0$ [m/s], $p = 4000$ [Pa], $\rho = 1$ [kg/m³] em todos os pontos sobre o fluido. γ é 1.111. De tal maneira, garantimos que o número de Mach será menos de 0.03 ainda que a velocidade do fluido aumente um pouco. O espaçamento da malha é $\Delta x = \Delta y = \frac{1}{128}$ [m] nas proximidades do cilindro; adotamos um método para simplificar a malha em 3 níveis à medida em que nos afastamos do cilindro, cada nível tem o espaçamento igual ao dobro do anterior. O intervalo de tempo Δt é tomado dinamicamente de acordo com a equação abaixo:

$$\Delta t = C_{CFL} \frac{\Delta x}{\max_{i,j} (|u_{i,j}| + c_{i,j}, |v_{i,j}| + c_{i,j})} \quad (15)$$

Na Eq. 15, $0 < C_{CFL} < 1$ é o número de Courant, e, quanto mais próximo de 0, menores as chances de divergência no cálculo. Nesta aplicação, adotamos $C_{CFL} = 0.6$. A viscosidade é $\mu = 0.005$ [Pa·s], de tal maneira, o número de Reynolds é 200. A geometria do problema pode ser vista na Fig. 6. As condições de fronteira são de velocidade, pressão e densidade constantes nas fronteiras esquerda, superior e inferior, e condição de Neumann na fronteira direita. A simulação é feita até $t = 200$ [s], e dados coletados para cada 0.2 [s].

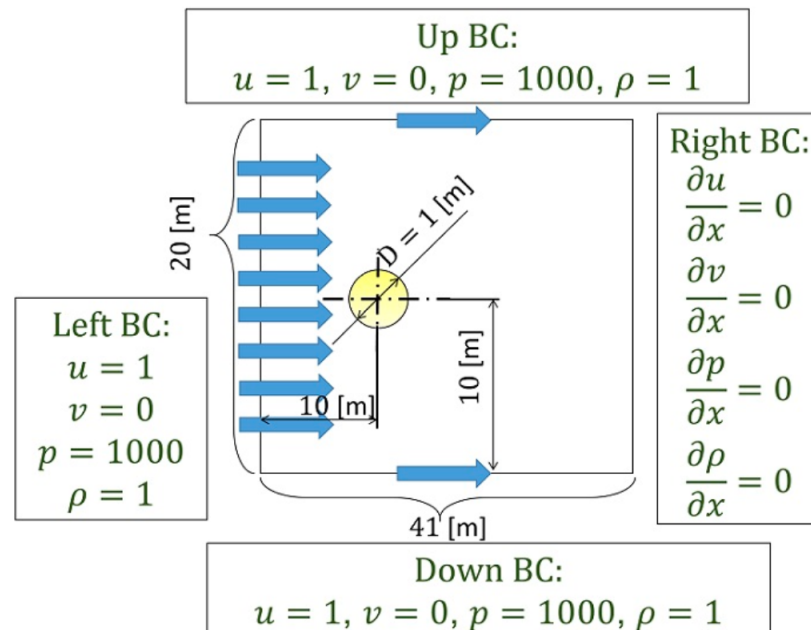


Figura 6. Geometria e condições de fronteira do problema



A Fig. 7 mostra a evolução dos coeficientes de arrasto C_D e sustentação C_L com o tempo, e comparamos com os resultados de Guilmineau e Queutey (7), que utilizaram o método da interpolação física constante (CPI, na sigla em inglês). Nossos resultados concordam bem com a referência. O pico do coeficiente de sustentação é em torno de 0.65 para ambos os estudos, e o mínimo coeficiente de arrasto chega a aproximadamente 0.9 até o início do desenvolvimento dos vórtices, quando aumenta e inicia a oscilar com baixa amplitude em torno de 1.35. Ademais, percebemos, nos dois casos, que o período de oscilação do derramamento dos vórtices é em torno de 5 s.

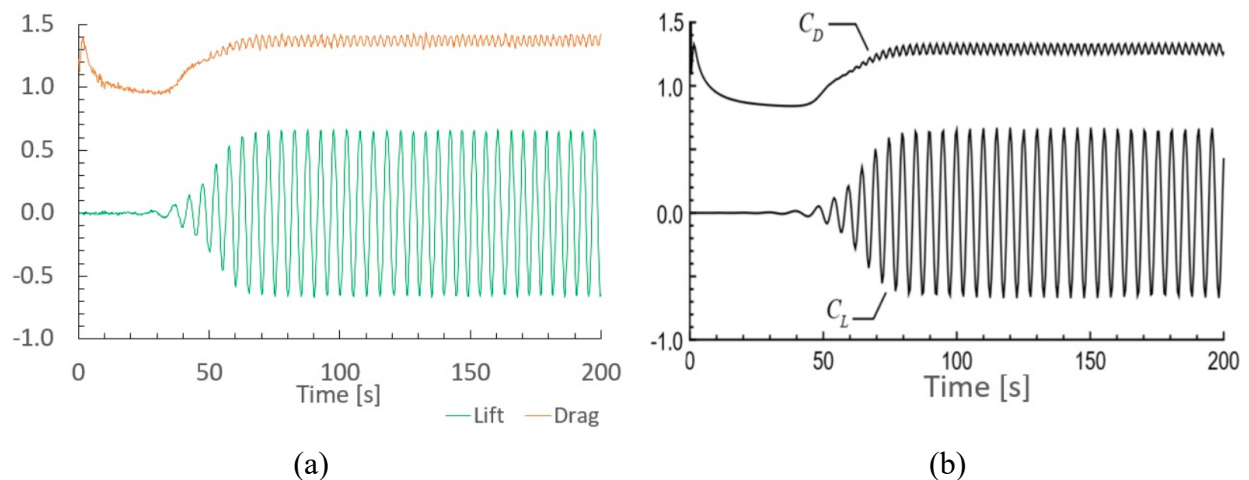


Figura 7. Variação com o tempo dos coeficientes de sustentação (em verde, C_L) e arrasto (em laranja, C_D). Em (a), nossos resultados; em (b), Guilmineau e Queutey (7).

A Fig. 8 mostra a evolução dos vórtices com o tempo; as linhas representam o lugar geométrico com isovorticidade, em vermelho positiva e em azul negativa. Percebe-se que se trata de um fenômeno periódico, visto que o formato dos vórtices em (a) é semelhante ao formato em (f).

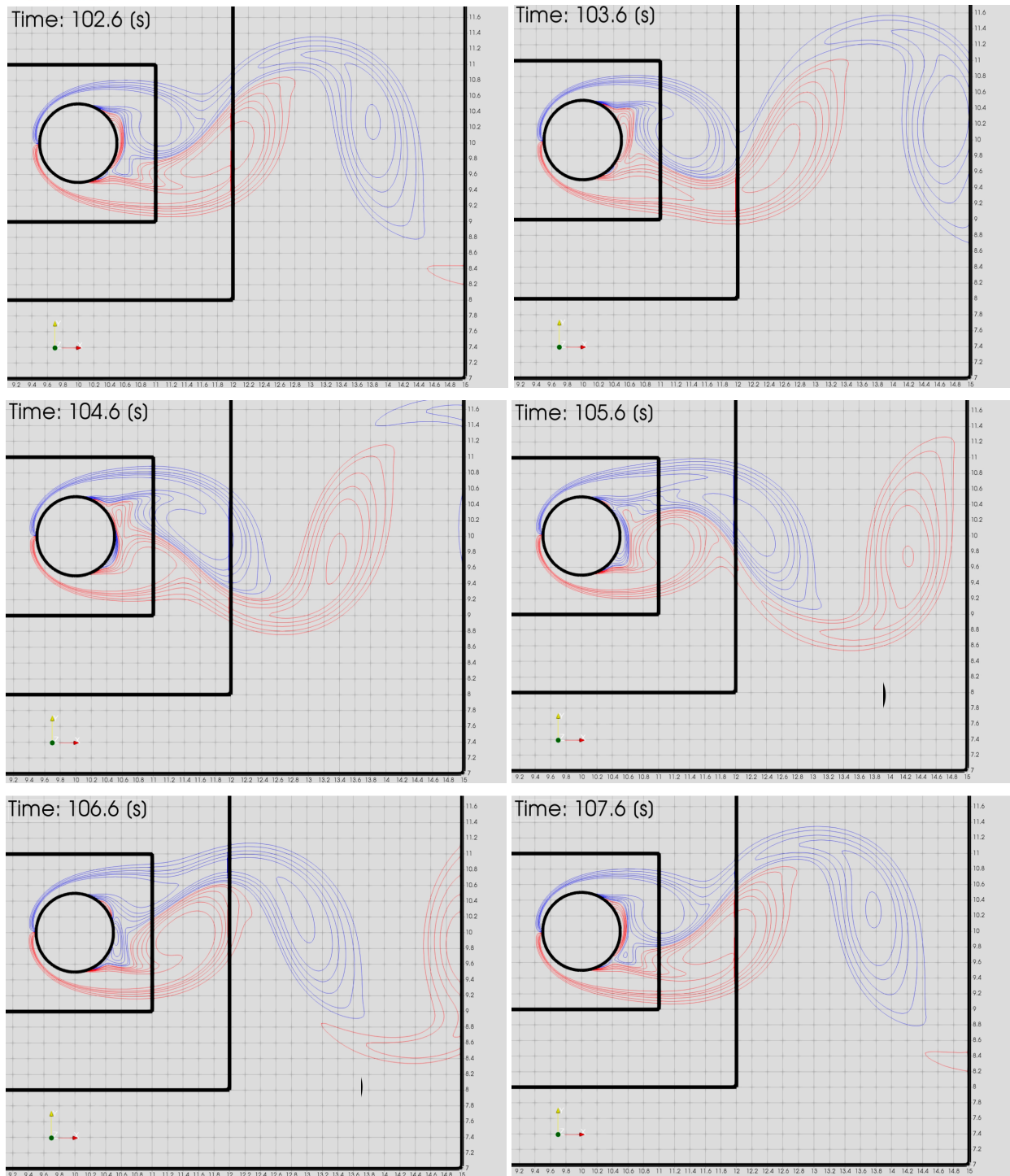


Figura 8. Evolução dos vórtices com o tempo no caso do cilindro estacionário



Agora, adicionaremos uma rotação constante de velocidade angular ω [rad/s] ao cilindro a partir de $t = 0$. O cilindro gira no sentido anti-horário. Para efeito de comparação, vamos classificar a rotação pela *taxa de rotação* adimensional α :

$$\alpha = \frac{\omega D}{2U_\infty} \quad (16)$$

Realizamos novas simulações com as configurações descritas na Tabela 1. As configurações do problema são semelhantes às da simulação com o cilindro estático, no entanto, a pressão inicial aumenta de acordo com a rotação do cilindro, para que a velocidade do som aumente e, conseqüentemente, possamos manter o número de Mach abaixo de 0.03.

Tabela 1. Valores da taxa de rotação e respectivas velocidades angulares e pressões iniciais

α	1.00	1.90	2.00	4.00	4.40	4.45	4.50	4.70	4.80	5.00
ω [rad/s]	2.0	3.8	4.0	6.0	8.8	8.9	9.0	9.4	9.6	10.0
p [Pa]	4000	4400	4500	16500	19500	20000	20500	22500	23500	25500

A evolução dos coeficientes de sustentação com o tempo pode ser conferida na Fig. 9. Como referência, à direita mostrados os resultados obtidos por Bouakkaz et al. (8) por meio de um software comercial e um método de volumes finitos.

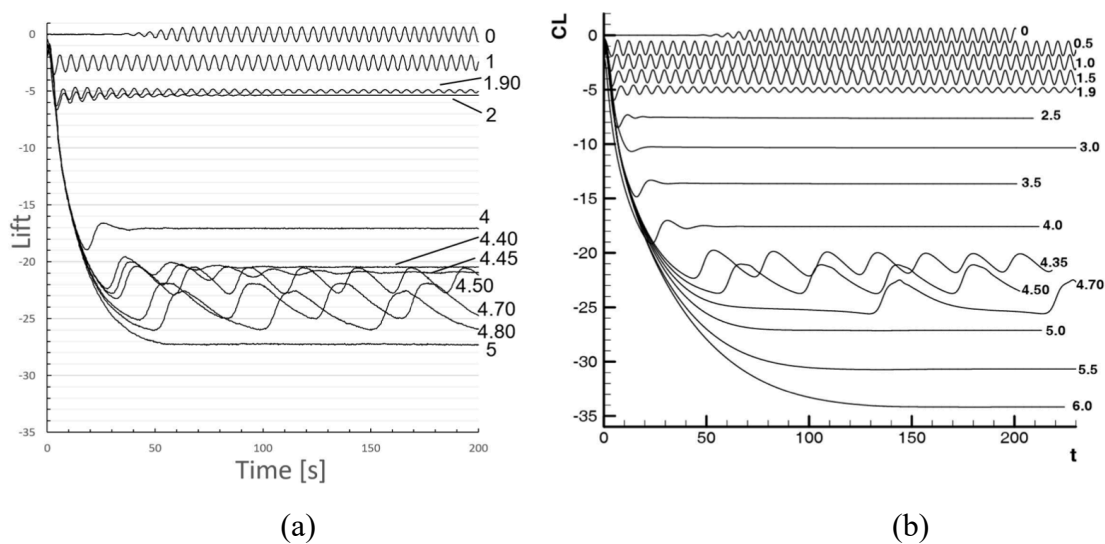
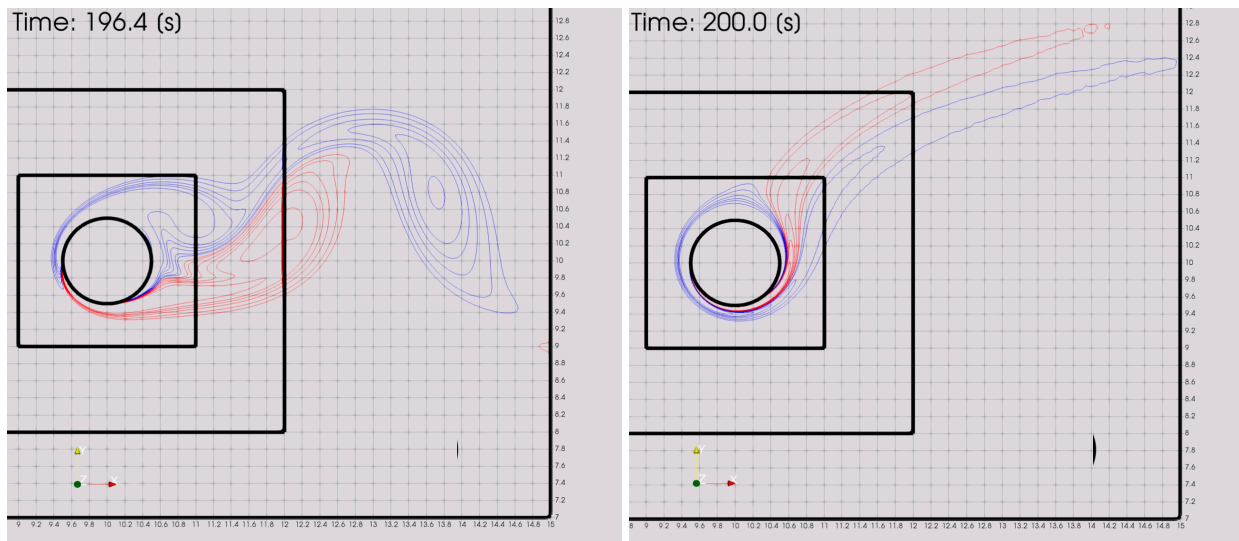


Figura 9. Coeficiente de sustentação para várias taxas de rotação deste estudo (a) e Bouakkaz et al. (b)



A partir de nossas simulações, identificamos 4 diferentes padrões do derramamento de vórtices, que mudam à medida em que a taxa de rotação do cilindro aumenta:

- P1 ($\alpha \leq 1.90$): os vórtices são derramados alternadamente a cada lado do escoamento por um tempo indefinido; à medida em que a taxa de rotação aumenta, os vórtices tendem a ser derramados para o sentido positivo de y (Fig. 10-a)
- P2 ($1.90 < \alpha \leq 4.45$): o derramamento de vórtices acontece por um tempo até cessar, já que a alta rotação do cilindro contém os vórtices positivos (Fig. 10-b).
- P3 ($4.45 < \alpha \leq 4.80$): a viscosidade contribui para o ressurgimento do derramamento de vórtices por tempo indeterminado; no entanto, somente vórtices positivos são derramados (Fig. 10-c).
- P4 ($\alpha > 4.80$): o derramamento de vórtices é cessado completamente, pois as forças viscosas se tornam muito grandes a ponto de contê-los próximos do cilindro (Fig. 10-d).



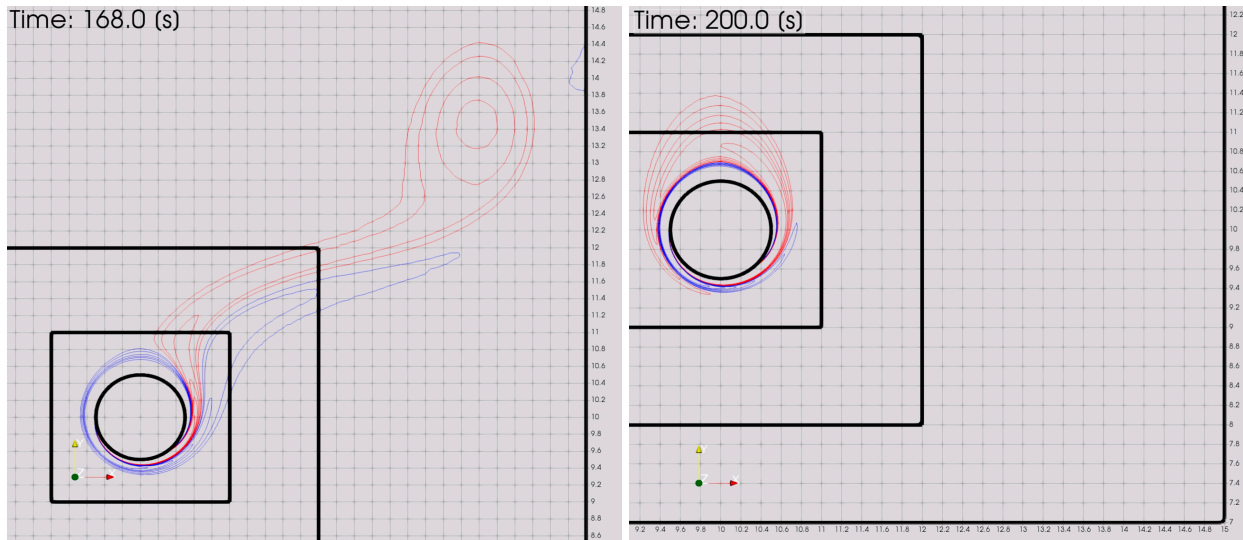


Figura 10. Perfil dos vórtices atrás de um cilindro com α 1.00 (a), 4.00 (b), 4.50 (c), e 5.00 (d)

Tais padrões foram verificados também por Bouakkaz et al., como podemos ver na Fig. 9-b. De acordo com Mittal e Kumar (9), o motivo do ressurgimento dos vórtices no padrão P3 se deve ao fato da vorticidade positiva ser confinada numa região próxima ao ponto de estagnação, e, em caso de uma perturbação, tal vórtice é derramado facilmente. No entanto, ao aumentar a rotação excessivamente, o vórtice positivo se encontra à esquerda do ponto de estagnação, sendo impossível de ser derramado.

Ao compararmos nossos resultados com os de Bouakkaz et al., percebemos que ambos os estudos apontam para os 4 padrões de derramamento de vórtices, no entanto, em nosso estudo, os valores limiares que definem as taxas de rotação máxima e mínima para cada padrão são ligeiramente maiores do que em Bouakkaz et al. O valor mínimo de P4 foi aproximadamente 0.15 a mais do valor do estudo referenciado. Diferenças entre o nosso método e o de Bouakkaz et al. incluem a adoção de uma malha quadriculada, enquanto Bouakkaz et al. adotaram uma malha circular ao redor do cilindro; e o fato de nós termos utilizado um método de diferenças finitas, enquanto eles utilizaram um método de volumes finitos. No entanto, nosso estudo é capaz de mostrar que GPUs permitem a solução de métodos de CFD com resultados satisfatórios em relação à bibliografia.

Resolvendo problemas de alta turbulência pelo método lattice Boltzmann (LBM). O método do escoamento fracamente compressível, conforme mencionado anteriormente, é incapaz de lidar com escoamentos de alto número de Reynolds. Para resolver problemas de números de Reynolds até a ordem de 10^5 , introduzimos o *método lattice Boltzmann* (LBM, na sigla em inglês), que, ao invés de partir das equações de Navier-Stokes, parte do princípio de Maxwell sobre a probabilidade



de distribuição das partículas. Logo, é um método que conecta a teoria da cinemática de partículas ao movimento do fluido.

Consideremos a função de distribuição f , que tende a um valor de equilíbrio, f^{eq} , após a contribuição das colisões entre partículas. A aproximação Bhatnagar-Gross-Krook (BGK) aponta para a seguinte relação entre f e f^{eq} (10):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{c} \cdot \nabla f = \frac{1}{\tau} (f^{eq} - f) \quad (17)$$

Na Eq. 17, \mathbf{c} é a velocidade da partícula, e τ é o fator de relaxamento, que é determinado de acordo com a análise de Chapman-Enskog, como na equação abaixo:

$$\tau = \frac{1}{2} + \frac{\nu}{c_s^2 \Delta t} \quad (18)$$

Acima, ν é a viscosidade cinemática do fluido, e c_s a velocidade isotérmica do som. Após relacionar a função de distribuição de equilíbrio com a teoria de Maxwell, podemos escrever f^{eq} em função da constante do gás ideal R , da temperatura absoluta do fluido T , da densidade ρ , e da velocidade macroscópica do fluido \mathbf{u} :

$$f^{eq}(\rho, \mathbf{u}, T, \mathbf{c}) = \frac{\rho}{(2\pi RT)^{3/2}} e^{-\frac{(\mathbf{c}-\mathbf{u})^2}{2RT}} \quad (19)$$

Podemos aplicar a expansão de Taylor na Eq. 19, obtendo então uma expressão facilmente programável para adaptar a um modelo de diferenças finitas, onde $c_s^2 = RT$:

$$f_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \Delta t, t + \Delta t) = f_i(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{\tau} \left(f_i(\mathbf{x}, t - \rho w_i \left(1 + \frac{\mathbf{c} \cdot \mathbf{u}}{c_s^2} + \frac{(\mathbf{c} \cdot \mathbf{u})^2}{2c_s^4} - \frac{\mathbf{u}^2}{2c_s^2} \right) \right) \quad (20)$$

Na Eq. 20, escrevemos a velocidade da partícula acompanhada do índice subscrito i , pois adotamos um modelo no qual, após a colisão, a função de distribuição é *transmitida* a outra célula com uma velocidade discreta \mathbf{c}_i . Daí temos o nome *lattice Boltzmann*, que, em português, significa que a teoria de Boltzmann é adotada para um sistema de “grade”, somente sobre a qual as partículas podem ser transmitidas. Para cada velocidade, um peso (w_i) é multiplicado de maneira a transmitir as velocidades nas direções mais prováveis com maior frequência do que nas menos prováveis.



Para este método, trataremos de problemas tridimensionais, e adotamos a “grade” D3Q29, que significa que temos 3 dimensões e 29 sentidos nos quais a função de distribuição pode ser transmitida (incluindo o sentido nulo, que significa que uma parcela da função não é transmitida). A “grade” está representada na Fig. 11, e os valores de c_i e w_i para cada sentido representado por $0 \leq i \leq 26$ estão descritos na Eq. 21:

$$c_i = \begin{cases} (0,0,0), \text{ for } i = 0 & \Rightarrow w_i = \frac{8}{27} \\ (\pm 1,0,0), (0, \pm 1,0), (0,0, \pm 1), \text{ for } 1 \leq i \leq 6 & \Rightarrow w_i = \frac{2}{27} \\ (\pm 1, \pm 1,0), (\pm 1,0, \pm 1), (0, \pm 1, \pm 1), \text{ for } 7 \leq i \leq 18 & \Rightarrow w_i = \frac{1}{54} \\ (\pm 1, \pm 1, \pm 1), \text{ for } 19 \leq i \leq 26 & \Rightarrow w_i = \frac{1}{216} \end{cases} \quad (21)$$

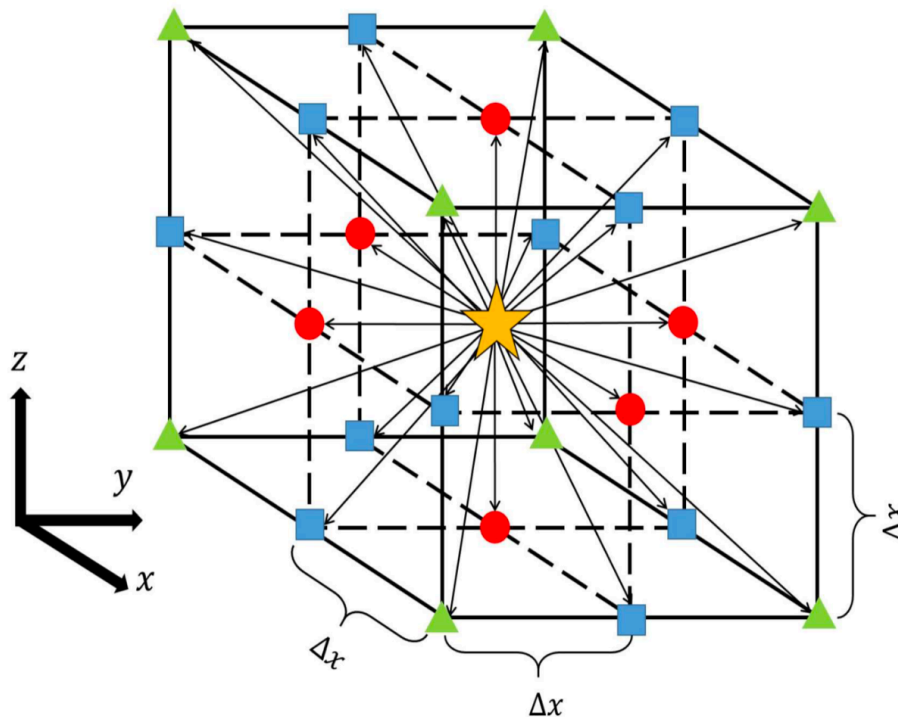


Figura 11. “Grade” do método lattice Boltzmann: direções de pesos diferentes estão representadas por cores diferentes; em amarelo, $i = 0$; em vermelho, $1 \leq i \leq 6$; em azul, $7 \leq i \leq 18$; em verde, $19 \leq i \leq 26$

Para aumentar a eficácia do método lattice Boltzmann e permitir a solução de números de Reynolds mais elevados, sugere-se o uso de métodos de múltiplos tempos de relaxamento (MRT



na sigla em inglês). Em 2015, Geier et al. (11) propuseram o *método dos cumulantes* para aumentar a eficácia na preservação da invariância galileana; bem como para desconectar diferentes graus de liberdade. Para implementar o método dos cumulantes, primeiramente escrevemos a função de distribuição em função da velocidade microscópica \mathbf{c} , que possui sistema de coordenadas cartesianas próprio:

$$f(\mathbf{c}) = \sum_{i,j,k} f_{i,j,k} \delta(\xi - ic) \delta(v - jc) \delta(\zeta - kc) \quad (22)$$

$-1 \leq i, j, k \leq 1$ representam as 27 direções do método D3Q27, e δ é a função delta de Dirac. Após realizamos a transformada de Laplace do domínio do espaço para o domínio da frequência, obtemos:

$$F(\mathbf{C}) = \sum_{i,j,k} f_{i,j,k} e^{-\Xi ic} e^{-\Upsilon jc} e^{-Zkc} \quad (23)$$

Os *cumulantes* são definidos a partir da expansão de Taylor da Eq. 23 após tomar seu logaritmo natural:

$$C_{\alpha,\beta,\gamma} = c^{-\alpha-\beta-\gamma} \frac{\partial^\alpha \partial^\beta \partial^\gamma}{\partial \Xi^\alpha \partial \Upsilon^\beta \partial Z^\gamma} \ln(F(\Xi, \Upsilon, Z)) \Big|_{\Xi=\Upsilon=Z=0} \quad (24)$$

Como os cumulantes estão ordenados, se torna fácil de preservar sua métrica caso somemos cumulantes de ordens iguais. Os cumulantes se relacionam com a teoria de Maxwell conforme a equação abaixo, onde ρ_0 é a densidade inicial:

$$\ln(F^{eq}(\Xi, \Upsilon, Z)) = \ln \frac{\rho}{\rho_0} - \Xi u - \Upsilon v - Z w + \frac{c_s^2}{2} (\Xi^2 + \Upsilon^2 + Z^2) \quad (25)$$

Similarmente à Eq. 17, os cumulantes são relaxados aos seus valores de equilíbrio $C_{\alpha,\beta,\gamma}^{eq}$ como a seguir ($C_{\alpha,\beta,\gamma}^*$ é o cumulante após a colisão, e $\omega_{\alpha,\beta,\gamma}$ é o fator de relaxamento):

$$C_{\alpha,\beta,\gamma}^* = \omega_{\alpha,\beta,\gamma} C_{\alpha,\beta,\gamma}^{eq} + (1 - \omega_{\alpha,\beta,\gamma}) C_{\alpha,\beta,\gamma} \quad (26)$$



Por meio do método dos cumulantes, é possível também adicionar forças externas ao fluido, o que é necessário no modelo de fronteira imersa. Para mais detalhes sobre cumulantes, ver Yang (12).

Método de fronteira imersa por força direta (DFIBM). O método de fronteira imersa por força direta (DFIBM, na sigla em inglês) se utiliza de pontos lagrangianos para representar o objeto imerso, e pontos eulerianos fixos para representar o fluido, numa grade tridimensional. Wang et al. (13) introduziram o método utilizado nesta obra, que se realiza por 5 passos a seguir (denotamos em letras maiúsculas grandezas relacionadas aos pontos lagrangianos; e minúsculas para os pontos eulerianos):

1. A velocidade temporal $\mathbf{u}_0^*(\mathbf{x}, t)$ é importada da rotina do LBM;
2. A velocidade temporal $\mathbf{U}_0^*(\mathbf{X}_j, t)$ é calculada a partir dos pontos eulerianos próximos:

$$\mathbf{U}_0^*(\mathbf{X}_j, t) = \sum_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_0^*(\mathbf{x}, t) \delta\left(\frac{x-X_j}{\Delta x}\right) \delta\left(\frac{y-Y_j}{\Delta x}\right) \delta\left(\frac{z-Z_j}{\Delta x}\right) \quad (27)$$

onde j denota o índice do marcador lagrangiano, e a função delta de Dirac é definida como:

$$\delta(r) = \begin{cases} \frac{1+\sqrt{1-3r^2}}{3} & \text{for } |r| \leq 0.5 \\ \frac{5-3|r|-\sqrt{1-3(1-|r|)^2}}{3} & \text{for } 0.5 \leq |r| \leq 1.5 \\ 0 & \text{for } |r| > 1.5 \end{cases} \quad (28)$$

3. Calculamos a força corporal sobre os marcadores lagrangianos:

$$\mathbf{F}_0(\mathbf{X}_j, t) = \rho \frac{\mathbf{U}^d(\mathbf{X}_j, t) - \mathbf{U}_0^*(\mathbf{X}_j, t)}{\Delta t} \quad (29)$$

onde \mathbf{U}^d denota a velocidade desejada, que corresponde à velocidade calculada pela mecânica dos sólidos, que apresentaremos em seguida;

4. A força sobre os pontos eulerianos é calculada como na equação a seguir:

$$\mathbf{f}_0(\mathbf{x}, t) = \sum_j \mathbf{F}_0(\mathbf{X}_j, t) \frac{1}{\Delta x^2} \delta\left(\frac{x-X_j}{\Delta x}\right) \delta\left(\frac{y-Y_j}{\Delta x}\right) \delta\left(\frac{z-Z_j}{\Delta x}\right) \Delta S_j \quad (30)$$

onde ΔS_j corresponde à área superficial associada a cada marcador.

5. Realizamos 5 iterações de um método para impor a condição de fronteira de não-derrapagem, como demonstrado em Wang et al (13). Obtemos, então, uma força final sobre os marcadores lagrangianos a ser adicionada à mecânica dos sólidos, e uma força final sobre a grade euleriana, a ser adicionada ao método dos cumulantes explicado anteriormente.



Aplicação do método lattice Boltzmann: bandeira tremulante. A maioria dos problemas de interação fluido-estrutura envolve estruturas não-deformáveis. Tal fato nos motivou a investigar a interação de objetos muito flexíveis com o fluido, como uma bandeira. Há diversas aplicações industriais de tal fenômeno, por exemplo, design de aeronaves de asa fixa (14), cilindros flexíveis para aplicação em reatores nucleares (15), e micromembranas medicinais (16). Nesta obra, focaremos no estudo da tremulação de uma bandeira exposta a ventos de alta velocidade, correspondente a um número de Reynolds superior a 10^5 .

A bandeira é modelada a partir de um sistema de massas e molas, e não possui espessura. Consideremos uma massa cujo vetor posição é \mathbf{x} , conectada a N outras massas por molas lineares. No estado inicial ($t = 0$), todas as molas estão em repouso, e a bandeira é plana. As forças às quais dada massa está sujeita T após o estado inicial são:

1. Forças elásticas (internas) aplicadas pelas molas, $\mathbf{F}_{el,i}$.
2. Forças provindas do fluido (externas) calculadas pelo DFIBM, \mathbf{F}_{ext} .
3. Forças gravitacionais, $\mathbf{F}_g = m\mathbf{g}$, onde m é a massa e \mathbf{g} é o vetor de aceleração da gravidade.

A partir da equação do movimento, obtemos a aceleração de cada massa, \mathbf{a} . O método de Runge-Kutta de 4ª ordem é usado para integrar a aceleração em relação ao tempo e obter a velocidade \mathbf{u} , que, por sua vez, é integrada pelo método de Euler de maneira a obter o vetor posição novo \mathbf{x} . As massas, dispostas em linhas e colunas, são conectadas por 3 tipos de molas. As molas normais conectam as massas adjacentes horizontal e verticalmente, para evitar que as massas se distanciem ou se aproximem umas das outras. As molas diagonais conectam as molas aos seus vizinhos diagonais, para que uma linha ou coluna de molas não deslize sobre a outra. Por fim, as molas de flexão, mostradas na Fig. 12, conectam cada massa ao vizinho de seu vizinho, horizontal e verticalmente, com a finalidade de resistir a flexões e assim evitar dobras. A força elástica é proporcional à distância entre a massa central e a linha que conecta as outras duas massas.

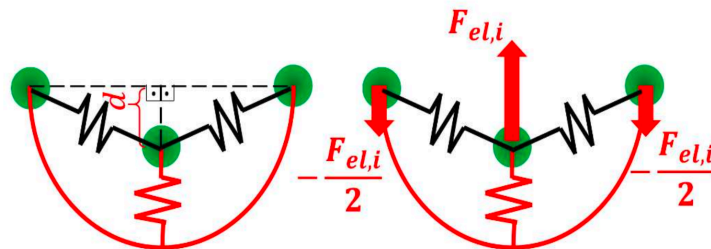


Figura 12. Forças agindo devido às molas de flexão

Para simular a bandeira tremulante, consideramos um domínio de dimensões de $16.384 \times 8.192 \times 8.192$ [m]. O espaçamento da malha mais refinada é de 1 mm, e usamos o *método de refinamento automático da malha* (AMR na sigla em inglês) com 7 níveis para refinar a malha nos pontos de maior vorticidade. O centro geométrico inicial da bandeira se localiza nas coordenadas



(4.096, 4.096, 4.096) [m]. A configuração inicial da bandeira é descrita na Fig. 13. Em seu estado inicial, a bandeira é um retângulo de 0.6 por 0.4 [m], cujo plano está rotacionado 0.1π em relação ao plano x - z e é perpendicular ao plano x - y . A extremidade vertical mais próxima da origem do sistema de coordenadas é fixa e corresponde ao mastro da bandeira.

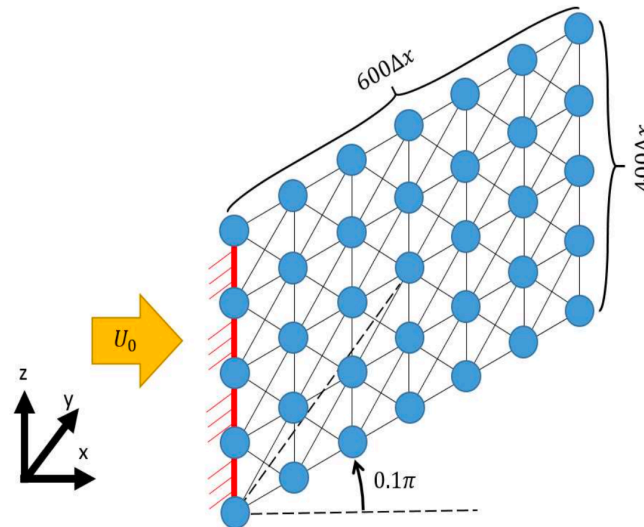


Figura 13. Configuração inicial da bandeira

As condições de fronteira são velocidade fixa de U_0 em todas as fronteiras, exceto aquela localizada na direção x positiva, que é condição de Neumann. A condição inicial é bandeira em repouso e velocidade do fluido igual a $(U_0, 0, 0)$ em todos os pontos. Analisamos 3 diferentes cenários, cada um com um valor de U_0 diferente, como na Tabela 2:

Tabela 2. Valores de U_0 e seus respectivos números de Reynolds

U_0 [m/s]	5	10	15
Re	2.0×10^5	4.1×10^5	6.1×10^5

As propriedades do fluido são correspondentes às do ar, que são densidade ρ igual a 1.2 [kg/m³] e viscosidade cinemática ν igual a 1.48×10^{-5} . O vetor de aceleração da gravidade é $(0, 0, -9.8)$ [m/s²]. A massa total da bandeira é igual a 0.1 [kg]. O coeficiente elástico k de todas as molas é igual a 2000 [N/m].

A simulação foi executada por 8 GPUs com um número de Courant igual a 0.02. De maneira a analisar o movimento da bandeira, propomos a definição dos pontos A' , B' e C' (na



posição inicial), e A , B e C , como na Fig. 14. Os pontos B e B' se referem à linha central dos marcadores lagrangianos (massas).

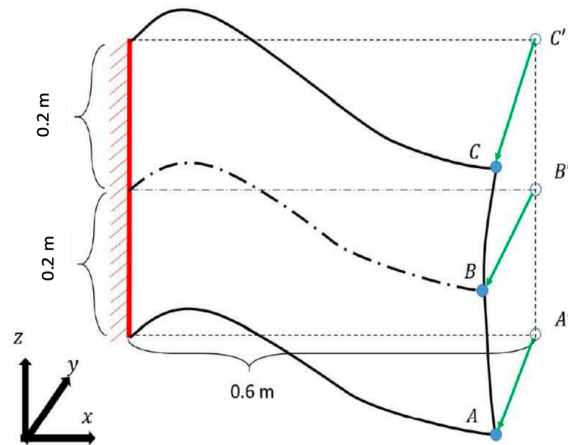


Figura 14. Pontos sobre a bandeira e vetores $\overrightarrow{A'A}$, $\overrightarrow{B'B}$, e $\overrightarrow{C'C}$

Definimos também os vetores $\overrightarrow{A'A} = (X'_A, Y'_A, Z'_A)$, $\overrightarrow{B'B} = (X'_B, Y'_B, Z'_B)$, e $\overrightarrow{C'C} = (X'_C, Y'_C, Z'_C)$. A Fig. 15 mostra a variação dos componentes destes vetores com o tempo:

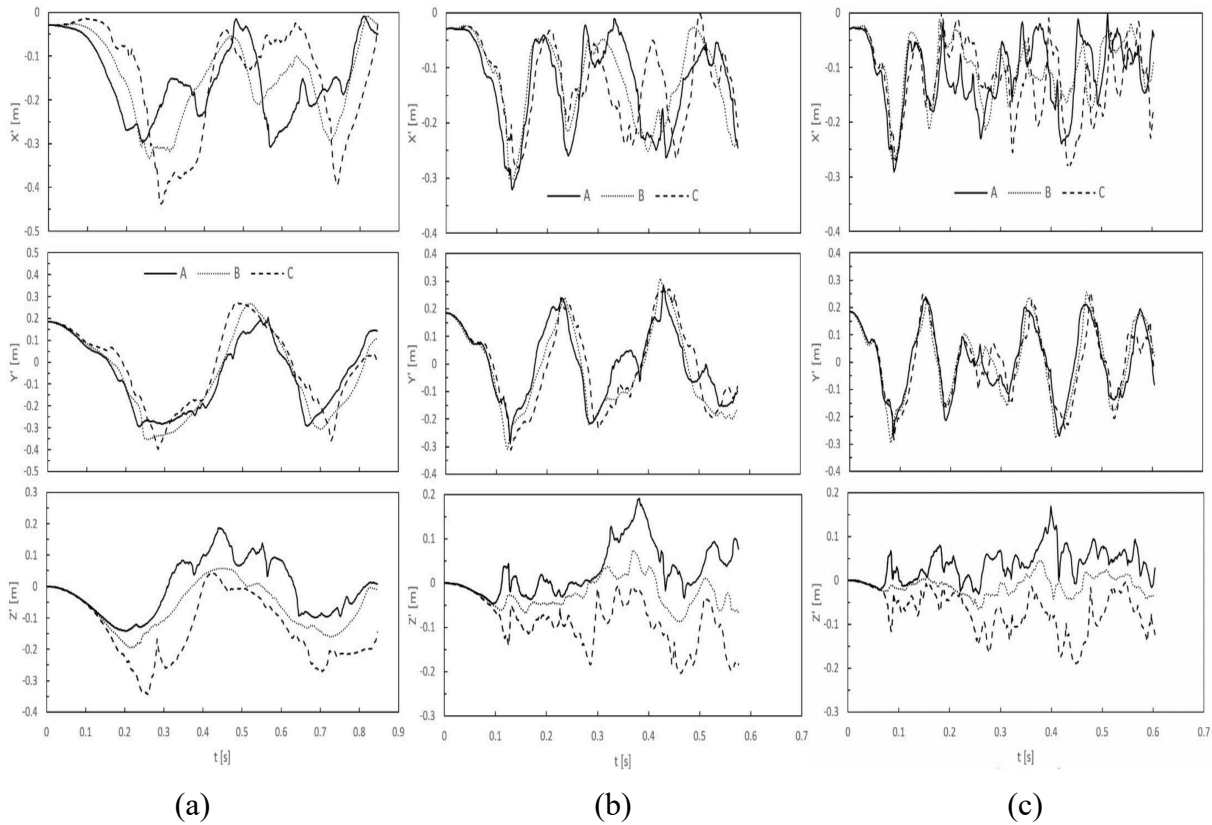


Figura 15. Variação com o tempo dos componentes dos vetores $\overline{A'A}$, $\overline{B'B}$, e $\overline{C'C}$ para $U_0 = 5$ m/s (a), $U_0 = 10$ m/s (b), e $U_0 = 15$ m/s (c)

Na Fig. 15, podemos constatar que, no caso de $U_0 = 5$ m/s, a gravidade é proeminente, já que Z'_A , Z'_B e Z'_C estão abaixo de zero na maioria do tempo. No entanto, ao analisar Y' , percebemos um movimento de agitação. Quando aumentamos U_0 , percebemos que a gravidade perde proeminência, e, para o caso de $U_0 = 15$ m/s, devido a um alcance similar dos pontos A e C , podemos perceber que as forças do fluido compensam o peso da bandeira. Ademais, ao analisar Y' , percebemos um movimento periódico da bandeira, ainda que tremulante. Por meio da contagem do número de picos e vales que a coordenada Y' do ponto B atinge em 0.5 s, determinamos a frequência de agitação da bandeira, que foi de 2 Hz para $U_0 = 5$ m/s, 5 Hz para $U_0 = 10$ m/s, e 9 Hz para $U_0 = 15$ m/s. Alguns artigos, como Taneda (17), apontam uma relação linear entre a frequência de agitação e a velocidade do fluido para bandeiras de mesmas dimensões e material. Em nosso caso, no entanto, não podemos confirmar tal linearidade, visto que, para baixas velocidades, o fluido faz esforço para levantar a bandeira. Na Fig. 16, podemos constatar o formato da bandeira nos momentos em que Y' está em seu pico.

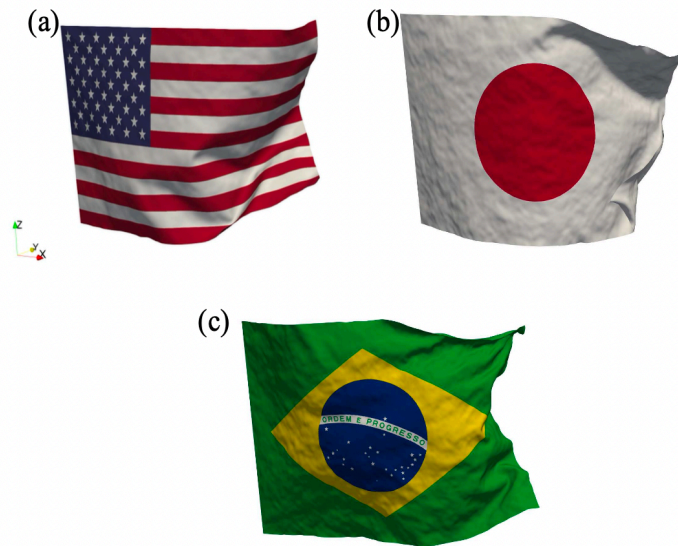


Figura 16. Screenshots da bandeira quando Y' está em seu pico para $U_0 = 5$ m/s (a), $U_0 = 10$ m/s (b), e $U_0 = 15$ m/s (c)

Uma descoberta notável de nossas simulações é o derramamento de vórtices delgados que se aglomeram em cachos em formato de disco. Tais estruturas não estavam documentadas na literatura antes de nossa apresentação na 25^a Conferência de Engenharia Computacional da Japan Society for Computational Engineering and Science (JSCES) em 2020 (18). Em tal ocasião, propusemos o nome de *vórtices yasai tempura* às estruturas, devido à sua semelhança ao prato típico japonês. A Fig. 17 mostra tais vórtices para $U_0 = 15$ m/s.

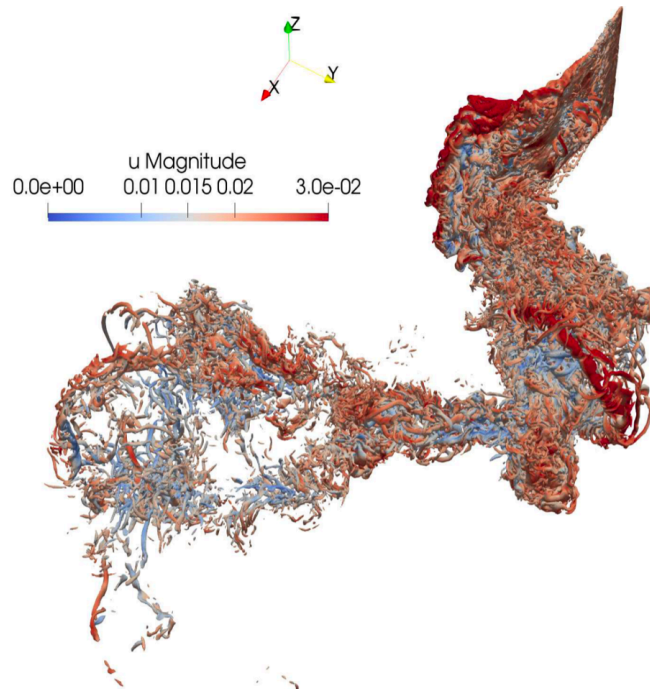


Figura 17. *Vórtices yasai tempura* para $U_0 = 15$ m/s

Para analisar o escoamento no rasto da bandeira, analisamos o espectro das 3 simulações pelo método de transformada rápida de Fourier (FFT, na sigla em inglês). Analisamos o ponto localizado a 5 cm pelo sentido positivo de x do ponto B . A Fig. 18 mostra tais espectros. Os picos de energia espectral (eixo das ordenadas) correspondem, aproximadamente, às frequências de 1 Hz para $U_0 = 5$ m/s, 6 Hz para $U_0 = 10$ m/s, e 9 Hz para $U_0 = 15$ m/s, correspondendo aproximadamente às frequências de agitação calculadas visualmente, que foram mencionadas anteriormente. Também percebemos que a decadência da energia obedece à lei de Kolmogorov, já que decresce paralela à curva exponencial com expoente igual a $-5/3$. Tal fenômeno de dissipação de energia se deve à transferência de energia de vórtices grandes a vórtices pequenos, que, em pequenas escalas, são convertidos em calor. Tal fenômeno é registrado em vários estudos analíticos e experimentais de escoamentos turbulentos (19).

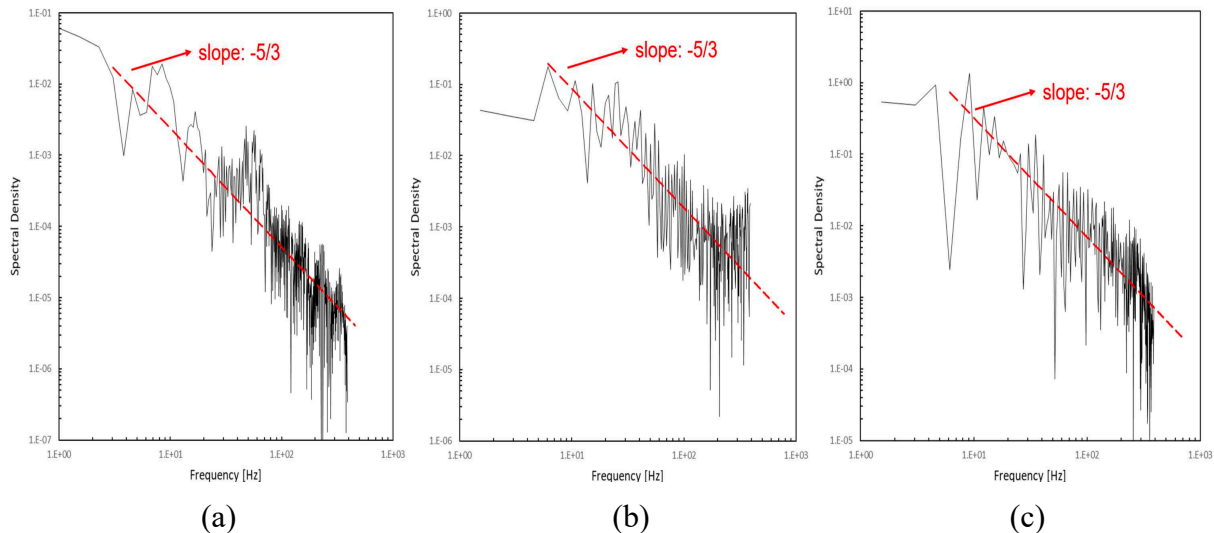


Figura 18. Análise espectral para $U_0 = 5$ m/s (a), $U_0 = 10$ m/s (b), e $U_0 = 15$ m/s (c)

Apesar das inéditas descobertas de nosso estudo, ele também apresenta alguns pontos a serem aprimorados. O modelo atual de massas e molas induz um movimento não-natural de pequenas ondas mecânicas que propagam pela bandeira em alta velocidade. Isto talvez seja melhorado caso adotemos um sistema de massas conectadas por molas não-lineares, ou se adicionarmos amortecedores às molas.

Conclusão. O uso de GPUs para a solução de problemas de dinâmica dos fluidos representa a abertura da possibilidade de resolver problemas de larga escala antes virtualmente impossíveis por programação em série. Neste sumário, apresentamos dois algoritmos aplicados à computação paralela. No caso do escoamento fracamente compreensível, pudemos validar nosso método em um problema de interação fluido-estrutura. No caso do método lattice Boltzmann, pudemos obter um movimento realista de uma bandeira sob um escoamento turbulento e descobrir vórtices inéditos. O estudo de estruturas flexíveis sob turbulências continua, todavia, repleto de incógnitas, portanto os autores esperam que este estudo influencie futuras investigações na área de interação fluido-estrutura, já que há diversas aplicações industriais para tal fenômeno.

Agradecimentos. Os autores agradecem à Japan Society for the Promotion of Science (JSPS) por ter financiado parcialmente o uso do supercomputador TSUBAME 3.0, do Instituto de Tecnologia de Tokyo. Ainda, o autor principal gostaria de agradecer ao Ministério de Educação, Cultura, Esportes, Ciência e Tecnologia (MEXT) do Japão, por ter lhe garantido bolsa de estudos para realizar sua graduação e mestrado naquele país.



Referências.

- (1) Vasata D, Galante G, Rizzi RL, Zara RA. Solução computacional do problema da cavidade cúbica através das equações de Navier-Stokes tridimensionais. *Rev. Bras. Ensino Fís.* 2011 Jun;33(2):1-10.
- (2) Tada E. A simulation of Fluid-Structure Interaction of a waving flag using multiple GPUs [dissertation]. Tokyo (Japan): Tokyo Institute of Technology; 2020.
- (3) Gupta P [Internet]. CUDA Refresher: The CUDA Programming Model; 2020 Jun 16. Available from: <https://developer.nvidia.com/blog/cuda-refresher-cuda-programming-model/#:~:text=A%20group%20of%20threads%20is,%2C%20or%20CUDA%20dynamic%20parallelism>).
- (4) Nvidia Corporation [Internet]. Nvidia Tesla P100 GPU Accelerator; 2016. Available from: <https://images.nvidia.com/content/tesla/pdf/nvidia-tesla-p100-PCIe-datasheet.pdf>.
- (5) Matsushita S. A Two-phase Flow Simulation based on Weakly Compressible Flow Scheme [dissertation]. Tokyo (Japan): Tokyo Institute of Technology; 2016.
- (6) Tada E. A Numerical Simulation for Moving Boundary Problems Using Weakly Compressible Flow Computation [dissertation]. Tokyo (Japan): Tokyo Institute of Technology; 2018.
- (7) Guilmineau E, Queutey P. A Numerical Simulation of Vortex Shedding from an Oscillating Circular Cylinder. *J. Fluids & Structures.* 2002;16(6):773-794.
- (8) Bouakkaz R, Talbi K, Ouazzazi M, Khelili Y, Salhi F. Effect of Rotation Rates on the Laminar Flow and Heat Transfer Past a Circular Cylinder. *Brazilian. J. Chem. Eng.* 2015;32(2):519-529.
- (9) Mittal S, Kumar B. Flow past a rotating cylinder. *J. Fluid Mech.* 2003;476:303-334.
- (10) Bhatnagar P, Gross E, Krook M. A Model for Collision Processes in Gases. I. Small Amplitude Processes in Charged and Neutral One-Component Systems. *Phys. Rev.* 1954;94(3):511-525.
- (11) Geier M, et al. The cumulant lattice Boltzmann method equation in three dimensions: Theory and validation. *Comp. & Math. w; Appl.* 2015;70(4):507-547.
- (12) Yang K. Simulation of Weakly Compressible Fluid Flow with Immersed Object Using Lattice Boltzmann and Finite Difference Method [dissertation]. Tokyo (Japan): Tokyo Institute of Technology; 2019.
- (13) Wang Z, Fan J, Luo K. Combined multi-direct forcing and immersed boundary method for simulating flows with moving particles. *Intl. J. Multi-phase Flow.* 2008;34(3):283-302.
- (14) Ortega-Casanova J, Fernandez-Feria R. Analysis of the aerodynamic interaction between two plunging plates in tandem at low Reynolds number for maximum propulsive efficiency. *J. Fluids & Structures.* 2016;63:351-373.
- (15) Degroote J, Delcour L, De Moerloose L, Dolfen H, Vierendeels J. Fluid-Structure Interaction Simulations of Flexible Cylinders in Confined Axial Flow. *Proc. ASME 2018 5th Joint US-Eur. Fluids Eng. Div. Summer Meeting.* 2018.
- (16) Kanchan M, Maniyeri R. Fluid-structure Interaction Study and Flow Rate Prediction Past a Flexible Membrane Using IBM and Ann Techniques. *J. Fluids Eng.* 2019;142(5).
- (17) Taneda S. Waving motion of flags. *J. Phys. Soc. Japan.* 1968;24:392-401.



- (18) Tada E, Yamaguchi D, Watanabe S, Aoki, T. A Simulation of Violent Flag Fluttering using Cumulant LBM and Direct Forcing IBM. Proceedings of the 25th JSCE Computational Engineering Conference; 2020 Jun 10-12; Kitakyushu (Japan).
- (19) Fylladitakis E. Kolmogorov Flow: Seven Decades of History. J. Appl. Math. & Phys. 2018;6:2227-2263.